矢量场的正则量子化

Canonical Quantization of Vector Fields

刘元彻　PB21020505
中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

2023 年 1 月 29 日

目录

1 符号约定 2

2 引言 3
2.1 量子场论的对称性 3
2.2 粒子是 Poincare 变换群的不可约表示 3
2.3 规范固定和冗余自由度 4

3 Spin-1 粒子和矢量场 4
3.1 从 Klein-Gordon 场开始 4
3.2 有质量矢量场的基本性质 6
3.3 质量消失带来额外约束 7

4 矢量场的正则量子化 9
4.1 有质量矢量场的对易量子化 9
4.2 无质量矢量场的对易量子化 [1] 10
4.3 Feynman 传播子 11

5 总结 [2, 3] 13

1 符号约定

- $\hbar = c = 1$：单位制；
- $i, j, k \ldots$：拉丁字母，表示的是空间指标，取值为 $1, 2, 3$；
- $\mu, \nu, \rho, \sigma \ldots$：希腊字母，表示的是 4-时空指标，取值为 $0, 1, 2, 3$。其中 0 指标是时间指标，其余为空间指标；
- $g_{\mu\nu}$：度规。本文取 $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ 的度规；
- p, x：4-动量和 4-速度。本文中，以正体字母表示 4-矢量；例如 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x^1, x^2, x^3)$
- $\vec{p}, \vec{x}$：3-动量和 3-速度。本文中，以带有箭头的字母表示 3-矢量；
- px：表示 4-矢量的内积，此处 $px = p_0 x^0 - p_1 x^1 - p_2 x^2 - p_3 x^3$；
- $\vec{p} \cdot \vec{x}$：表示 3-矢量的内积，此处 $\vec{p} \cdot \vec{x} = p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3 x^3$；
- $p^2 - m^2 = 0$：质能方程，也即粒子的 on-shell 条件，展开为 $E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2$；
- $a^\dagger(\vec{p}), a(\vec{p})$：产生算符和湮灭算符，用来产生/湮灭一个 3-动量为 $\vec{p}$ 的粒子；
- $\|\vec{p}\|$：3-矢量的模长，此处是一个 3-动量的模长；
- 其余符号将在文章中进行定义。

2 引言

2.1 量子场论的对称性

我们所探讨的物理理论往往建立在一些时空对称性的基础上。具体而言，量子场论要求的对称性有：

- 时空均匀性。因为我们讨论的是平直时空的量子场论，所以时间和空间分别是各向同性的——没有哪一个时间地点比其他的点在物理上更特殊。

  数学上说，如果我们将一个场 $\varphi(x)$ 作时空平移变换[1]：$\varphi(x) \to \varphi(x+a)$（其中，$a$ 是一个常的 4-矢量），对于观察者而言，整个系统的行为不会有任何不同。

- Lorentz 不变性。量子场论探讨的是"狭义相对论框架下的量子力学"，狭义相对论要求的 Lorentz 不变性量子场论也需要满足。

  数学上说，我们要求一个系统的作用量应该是 Lorentz 标量——否则在一个 Lorentz 变换下，系统的作用量改变，则运动方程也不一定保持，于是 Lorentz 不变性被破坏。

以上两种对称性，在狭义相对论中分别对应[2]平移 (translate)、旋转 (rotate) 和推动 (boost) 三种基本操作；而这三种基本操作共称为 Poincare 变换——可以证明，Minkowski 空间作为一个伪欧氏空间，其上的等距变换 (isometry) 只能含有以上三种操作及其叠加。于是 (1+3) 维时空的 Poincare 变换构成了 $\mathbb{ISO}(1,3)$ 群（以后，我们用 Poincare 变换群来代指它）。

2.2 粒子是 Poincare 变换群的不可约表示

我们考虑用 $|\psi\rangle$ 来标记一个粒子。如果定义了一个 Poincare 变换 $\mathcal{P} \in \mathbb{ISO}(1,3)$：$|\psi\rangle \to \mathcal{P}|\psi\rangle$，在态矢空间中将对应给出庞加莱变换群的一个表示。

而对 $\mathcal{P}$ 这个变换，物理上有要求：$\mathcal{P}$ 不能拥有一个非平凡的不变子空间（否则在物理上，我们将会拥有一个对 Poincare 变换封闭的子空间，这至少违背了时空均匀的要求）——而 $\mathcal{P}$ 在态矢空间中这就确定了一个不可约表示；另外，考虑矩阵元

$$\mathcal{M} = \langle\psi_1|\psi_2\rangle \to \langle\psi_1| P^\dagger P |\psi_2\rangle \tag{2.1}$$

若要满足 Poincare 不变性，需要使 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{P}$ 的变换下不变，于是给出：

$$P^\dagger P = 1 \tag{2.2}$$

这正是幺正性的定义。以上事实告诉我们，粒子对应态矢空间[3]中的元素，在 Poincare 变换下，同一个粒子对应的态矢空间元素也会有一个变换（这正是态矢空间上的表示，单粒子态就对应了这个表示中的一个元素）——所以可以说粒子是 Poincare 变换群的不可约幺正表示。

Wigner 证明，Poincare 群不存在有限维的不可约幺正表示，而在无穷维的表示中，利用质量 m 和自旋 J 可以区分出不同的表示，具体叙述为如下定理：

定理 2.1 (Wigner)**.** *$\mathbb{ISO}(1,3)$ 群只存在无穷维的不可约幺正表示，这些表示可以被两个量子数 m 和 J 标记并区分。其中，$m \geq 0$ 为非负实数，$J = 0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, \ldots$ 为半非负整数。*

---

[1]这是主动观点；如果用被动观点，相当于将时空坐标作为参数，进行重参数化 (reparameterization)——显而易见，一个参数上的整体平移不应该从物理上影响系统。

[2]平移对应自己，而 Lorentz 变换包含了旋转和推动，暂时不讨论时间反演和空间反演操作

[3]一个 Hilbert 空间

在物理上，这区分出了不同种类的基本粒子；而在数学上，我们将这些表示用**含有四维指标**[4]的不同数学对象——确切地说，我们用标量场 $\varphi(x)$ 来表示 spin-0 粒子，旋量场 $\psi(x)$ 来表示 spin-$\frac{1}{2}$ 粒子，矢量场 $V_\mu(x)$ 来表示 spin-1 粒子，等等。标量场和旋量场的量子化已经被探讨过，这里不再赘述。本文中，我们将对矢量场和 spin-1 粒子进行研究，并探讨其量子化方法。

2.3 规范固定和冗余自由度

然而，在采用不同类型的场来描述粒子前，还有一个要解决的问题是自由度数目。Wigner 还告诉我们，对于任何 $J>0$ 的情形，同一种实粒子[5]不同态的数目与其质量有关：若 $m>0$，则有 $2J+1$ 种态；若 $m=0$，则一定只有 2 种态。我们知道，对于一个实的四维 Lorentz 标量场，其有 1 个分量，自由度正是 1；而一个有质量 spin-0 粒子 $(J=0)$ 的态数目也是 $2J+1=1$ 个，这恰好与实标量场的自由度数量相当；同理复标量场自由度也与无质量 spin-0 粒子自由度数量相当，因此标量场可以很好地刻画 spin-0 粒子。但对于矢量场，其具有 4 个自由度，然而有质量的 spin-1 粒子仅具有 $2J+1=3$ 个自由度，出现了 1 个自由度冗余；若是无质量的情形，则出现 2 个自由度冗余。为了消除这些冗余自由度，我们将选取特定的规范 (gauge) 作为约束条件。

3 Spin-1 粒子和矢量场

3.1 从 Klein-Gordon 场开始

截至目前，我们对 spin-1 粒子仍然“一无所知”。但所幸，下面的自旋-统计定理给了我们一个很好的出发点。

定理 3.1 (自旋-统计定理)**.** *自旋量子数 J 为半整数的粒子称为费米子（Fermion），服从费米统计；J 为整数的粒子称为玻色子（Boson），服从玻色统计。这种分类与粒子是否具有质量无关。*

这个定理告诉我们，标量场刻画的 spin-0 粒子和矢量场刻画的 spin-1 粒子都属于玻色子。而标量场 $\varphi(x)$ 具有 Klein-Gordon 拉氏量：$\mathcal{L}_0=-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+\frac{1}{2}m^2\varphi^2$，一个自然的想法是，将 spin-1 粒子的矢量场 $A_\mu(x)$ 也构造一个相似的拉氏量：

$$\mathcal{L}_1=-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \tag{3.1}$$

变分，给出运动方程：

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial A_\nu}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\\&=m^2A_\nu+\partial_\mu\partial^\mu A_\nu\end{aligned}\Rightarrow(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)A_\nu=0 \tag{3.2}$$

这仍然是 Klein-Gordon 方程。对(3.1)作 Legendre 变换，给出能量密度：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1&=\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_t A_\mu)}(\partial_t A_\mu)-\mathcal{L}_1\\&=-(\partial_t A_\mu)(\partial_t A^\mu)+\frac{1}{2}[(\partial_t A_\mu)(\partial_t A^\mu)-(\partial_i A_\mu)(\partial^i A^\mu)-m^2A_\mu A^\mu]\\&=-\frac{1}{2}[(\partial_t A_0)^2+(\nabla A_0)^2+m^2A_0^2]+\frac{1}{2}[(\partial_t\vec{A})^2+(\partial_i A_\mu)(\partial^i A_\mu)+m^2\vec{A}\cdot\vec{A}]\end{aligned} \tag{3.3}$$

[4]为了方便直接看出 Lorentz 不变性

[5]满足 on-shell 条件 $p^2=m^2$

(3.3)给出的能量密度被分为两部分，前一部分是负定的，后一部分则是正定的。我们不能容忍一个系统在某种场分布下拥有总能量为负，因此上面这个拉氏量给出的是非物理的场。这要求我们修正拉氏量。

仍然在 Klein-Gordon 拉氏量(3.1)的基础上考虑，但这次我们考虑所有可能的 Lorentz 不变性[6]，利用指标，我们可以写出一个一般的拉氏量：

$$\mathcal{L} = \frac{a}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{b}{2}\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + \frac{c}{2}\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \tag{3.4}$$

式中 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 是三个常数。对上式变分，给出运动方程：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= m^2 A_\nu - a\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - (b+c)\partial^\nu \partial_\mu A^\mu \\ &= (m^2 - a\Box)A^\nu - (b+c)\partial^\nu \partial_\mu A^\mu \end{aligned} \tag{3.5}$$

这个运动方程不易处理，我们可以再对 x^ν 求导一次，缩并掉自由指标：

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= [m^2 - (a+b+c)\Box]\partial_\mu A^\mu \\ &= [\Box + (\frac{m}{\sqrt{-(a+b+c)}})^2]\partial_\mu A^\mu \end{aligned} \tag{3.6}$$

这给出了一个质量为 $M = \dfrac{m}{\sqrt{-(a+b+c)}}$ 的 spin-0 粒子的运动方程，而 $\partial_\mu A^\mu$ 是用来刻画这个 spin-0 粒子的标量场。我们不希望 spin-1 粒子的运动方程中含有 spin-0 的成分，可以令 $a+b+c=0$，这就会自然地给出约束条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.7}$$

这也被称为 Lorenz 规范 (Lorenz Gauge)。将这个式子带回拉氏量，并考虑到拉氏量中的第三项不应该存在（对于 spin-1 粒子，这一项是非物理的），因此令 $c=0$。那么考虑到 $a+b+c=0$ 的约束，不妨取 $a=-1, b=1$，得：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8)中的 $\mathcal{L}$ 被称为 Proca 拉氏量，它描述质量为 m，自旋 $J=1$ 的自由粒子。他给出的运动方程即为：

$$(\Box + m^2)A_\mu = 0,\ \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.9}$$

(3.9)被称为 Proca 方程。其中，$F_{\mu\nu} \triangleq (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ 是一个反对称张量（常称为 Maxwell 电磁张量）。电动力学的知识告诉我们，电磁张量和电场与磁场强度密切相关，但现在我们在只引入了四维势 A_μ 的条件下给出了这个张量。不妨先定义出电动力学中使用的场强：

$$\begin{cases} \vec{E} \triangleq \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{A}_0 \\ \vec{B} \triangleq \nabla \times \vec{A} \end{cases} \tag{3.10}$$

[6]当然可以含有更高阶导数项来缩并，但在 Klein-Gordon 场的讨论中我们已经知道，这会引入负能量密度问题。想要规避这种问题，自然选择略去这些项

$$\begin{aligned}\Rightarrow -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\end{aligned} \tag{3.11}$$

为了检证我们是否真的解决了负能量密度的问题，我们利用 Noether 定理，可以构造出能动张量：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mu\nu} &\triangleq g_{\mu\sigma}[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\alpha)}\partial_\nu A_\alpha - \delta^\sigma{}_\nu \mathcal{L}] \\ &= g_{\mu\sigma}[-F^{\sigma\alpha}\partial_\nu A_\alpha - \delta^\sigma{}_\nu(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha)] \\ &= -F_\mu{}^\alpha \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2 A_\alpha A^\alpha\end{aligned} \tag{3.12}$$

取能量密度的分量 ($\mu = 0, \nu = 0$)：

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = T_{00} &= -F_0{}^\alpha \partial_0 A_\alpha + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha \\ &= -(\partial_t A^\alpha - \partial^\alpha A_0)\partial_t A_\alpha - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha \\ &= -(\partial_t A^0)^2 + \partial^t A_0 \partial_t A_0 + (\partial_t \vec{A})^2 - (\partial_t A)\cdot(\nabla A_0) - \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2 - \frac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha \\ &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{2}m^2(A_0^2 + \vec{A}^2) + A_0\partial_t(\partial_\mu A^\mu) - A_0(\Box + m^2)A_0 + \partial_i(A_0 F_0{}^i)\end{aligned} \tag{3.13}$$

上面式子中，前两项是正定的；后三项中，$\partial_\mu A^\mu = 0$ 是规范约束，$(\Box + m^2)A_0 = 0$ 是运动方程，这两项都被消去；$\partial_i(A_0 F_0^i)$ 是对空间的全微分项，在整个空间积分后为 0（这一项只可能导致局部的能量出现负值，这是可以容许的，只要全空间的总能量仍然正定即可）。由此，我们知道了 Proca 方程(3.9)是符合我们要求的运动方程。

3.2 有质量矢量场的基本性质

和在 Klein-Gordon 场中所做的一样，我们考察上述 Proca 方程(3.9)的平面波解得。做一个 Fourier 变换，得到：

$$A_\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\tilde{A}(p)\varepsilon_\mu(p)\mathrm{e}^{ipx} \tag{3.14}$$

其中 $\tilde{A}(p)$ 是各处的振幅（在动量表象下），$\varepsilon(p)$ 则是一组 4-矢量（利用 μ 指标会提取出一个分量）。

现在设法让这个解满足 Lorenz 规范(3.7)，我们知道 $\varepsilon(p)$ 只能有三个独立的分量，于是我们可以选取一组矢量基 ε^i, $(i = 1, 2, 3)$（为了考察方便，我们不妨选取平面波动量方向为 z 轴方向），并将系数吸收进 $\tilde{A}(p)$ 中，将解写为如下形式：

$$A_\mu = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\tilde{a}_i(p)\varepsilon^i_\mu(p)\mathrm{e}^{ip_\nu x^\nu} \tag{3.15}$$

然后将解(3.15)代入(3.7)，可以得到：

$$\begin{aligned}0 &= \partial^\mu A_\mu \\ &= \partial^\mu \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\tilde{a}_i(p)\varepsilon^i_\mu(p)\mathrm{e}^{ip_\nu x^\nu} \quad \Rightarrow p^\mu \varepsilon^i_\mu = 0, \text{(for all } \tilde{a}_i(p)) \\ &= i\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\tilde{a}_i(p)p^\mu\varepsilon^i_\mu(p)\mathrm{e}^{ip_\nu x^\nu}\end{aligned} \tag{3.16}$$

这是 Lorenz 规范给出的要求，只要选取的 ε^i 满足以上条件即可。容易检验如下的矢量基是合法的[7]：

$$p^\mu = (E, 0, 0, p_z), \begin{cases} \varepsilon^1_\mu = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon^2_\mu = (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon^3_\mu = (\frac{p_z}{m}, 0, 0, \frac{E}{m}) \end{cases} \tag{3.17}$$

我们常常称这一组 ε 为偏振矢量 (polarization vectors)。其中，ε^1,ε^2 被称为横向偏振（Transverse Polarizations），ε^3 被称为纵向极化（Longitudinal Polarization）[8]。以上就给出了有质量矢量场的基本性质。

3.3 质量消失带来额外约束

显而易见地，对于无质量粒子，我们在 Proca 拉氏量(3.8)中令 $m \to 0$ 即得到：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3.18}$$

值得注意的是，拉氏量中失去了质量项后，其性质发生了根本的改变——他不再含有 $A_\mu A^\mu$ 的缩并项，而只含有 $\partial_\mu A^\nu$ 这样的导数项。经典场论的知识告诉我们，拉氏量不显含场本身时，拉格朗日方程可以等效为一个首次积分，这个首次积分可以被看作一种拉格朗日型约束。这引起了我们的警惕——无质量粒子是否具有额外的约束?

为了明确这一点，我们考虑如下变换：

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \text{ for all } \alpha(x) \tag{3.19}$$

直接代入(3.18)，容易验证出 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 在此变换下是不变量。同样对拉氏量(3.18)作变分，给出运动方程：

$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\partial_j \partial^j A_0 + \partial_t \partial^j A_j = 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu A_i - \partial_i(\partial^t A_0 - \partial^j A_j) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

在以上的式子中，我们抛弃了 Lorenz 规范，而决定采用新的规范。留意到 Lorenz 规范(3.7)等价于 $\partial^t A_0 - \partial^j A_j = 0$，现在我们取其中的一部分：

$$\partial^j A_j = 0 \tag{3.21}$$

(3.21)被称为 Columb 规范（Columb Gauge），代入(3.20)就给出新的运动方程：

$$\begin{cases} \partial_j \partial^j A_0 = 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu A_i - \partial_i \partial^t A_0 = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

这里仍然给出了 4 个方程。但是考虑到 $\partial_j \partial^j A_0 = 0$，可以认为这个 A_0 除去一个常数后，必然是关于时空的线性函数。又因为我们期望在空间的无穷远处是没有场的，故一定有 $A_0 = 0$。带回方程(3.22)：

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu A_i = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

[7] 矢量基的选择方法有很多种，这里仅仅给出了其中一种。

[8] 也有记号将 ε^3 记为 ε^L

这就是无质量矢量场的运动方程。有了 $A_0=0$（自然约束）和 $\partial^j A_j=0$（Columb 规范）后，相当于这个矢量场仅有两个自由度，这正符合 Wigner 的结论。按照有质量矢量场的方法，我们也可以给出平面波解的形式：

$$A_\mu(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\tilde{a}_i(p)\varepsilon^i_\mu(p)\mathrm{e}^{ipx}\tag{3.24}$$

代入规范(3.21)，得到：

$$\begin{aligned}0&=\partial^j A_j\\&=\partial^j\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\tilde{a}_i(p)\varepsilon^i_j(p)\mathrm{e}^{i(\omega t-\vec{p}\cdot\vec{x})}\Rightarrow\begin{cases}p^j\varepsilon^i_j=0\\\varepsilon_0=0\end{cases}\\&=-i\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\tilde{a}_i(p)p^j\varepsilon^i_j(p)\mathrm{e}^{ipx}\end{aligned}\tag{3.25}$$

这看起来和之前的偏振矢量方程没有区别，但是相对论性粒子服从的质能方程 $p^2=m^2=0$ 使得我们不能按照原先的方法取定 ε^3。稍作修正，容易给出如下的矢量基：

$$p^\mu=p_z(1,0,0,1),\begin{cases}\varepsilon^1_\mu=(0,1,0,0)\\\varepsilon^2_\mu=(0,0,1,0)\\\varepsilon^3_\mu=(1,0,0,1)\end{cases}\tag{3.26}$$

可这里还有一个问题：我们在为有质量 Proca 方程求解时，考虑到了有质量 spin-1 粒子具有三个自由度，所以解空间应当有三维，于是在 Lorenz 规范下确定了 ε_μ 的三个基；但对于无质量情形，只有两个自由度，然而 Lorenz 规范下仍会给出三个基且 ε^3 在 Columb 规范下是不合法的。应该如何理解这个“冗余”的 ε^3 呢?

仔细观察发现，在(3.17)中，给出的三个基矢量都满足 $\varepsilon^i_\mu\varepsilon^{i\mu}=-1\neq0$，这表明三个基矢量都是物理的。而在(3.26)中，我们恰恰发现 $\varepsilon^3_\mu\varepsilon^{3\mu}=0$，这表明即便是在 Lorenz 规范下，基矢 ε^3 也是非物理的，我们总可以轻易地选定规范变换因子 $\alpha(x)$ 来使得这部分被消去。现在我们选择了 Columb 规范，自然也只能给出前两个基：

$$p^\mu=p_z(1,0,0,1),\begin{cases}\varepsilon^1_\mu=(0,1,0,0)\\\varepsilon^2_\mu=(0,0,1,0)\end{cases}\tag{3.27}$$

当然，基矢的取法很多，可以验证以下的取法：

$$p^\mu=p_z(1,0,0,1),\begin{cases}\varepsilon^L_\mu=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0)\\\varepsilon^R_\mu=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0)\end{cases}\tag{3.28}$$

(3.28)给出的基被称为螺旋偏振（Helicity Polarizations），两个基矢的行为与光学中左旋偏振和右旋偏振相似。这里的求和指标 λ 其实可以标记螺度（helicity）。

定义 3.1 (螺度 (Helicity)). *螺度定义为粒子自旋在其动量方向的投影，具体来说，如果记 Pauli 矩阵构成的矢量为 $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$，那么螺度算符定义为：*

$$h=\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{\|\vec{p}\|},\ \vec{\Sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma}&0\\0&\vec{\sigma}\end{pmatrix}$$

螺度算符作用在粒子相应本征态上得到的本征值，即为螺度。

无论选取什么样的基，都不会对场本身的性质产生影响——毕竟他们只是一组表达而已。

4 矢量场的正则量子化

4.1 有质量矢量场的对易量子化

在前一部分，我们类比 spin-0 粒子，对 Klein-Gordon 方程进行改造得到了 spin-1 粒子的 Proca 方程(3.9)（适用于有质量粒子）和 Maxwell 方程(3.22)（适用于无质量粒子）。自然地，我们想到依照标量场，构造场算符：

$$A_\mu(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_{\lambda=1}^{3}[\varepsilon_\mu^\lambda(p)a^\lambda(\vec{p})\mathrm{e}^{-ipx}+\varepsilon_\mu^{\lambda*}(p)a^{\lambda\dagger}(\vec{p})\mathrm{e}^{ipx}] \tag{4.1}$$

以及对应的动量算符：

$$\Pi^\mu(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0A_\mu)}=F^{\mu0} \tag{4.2}$$

其中 $\varepsilon^{\lambda*}$ 同样是一个矢量，只不过其各个分量都取共轭：${\varepsilon^{\lambda*}}_\mu=(\varepsilon_\mu^\lambda)^*$。而 ε 是符合我们所述条件的抽象矢量基，他们满足如下的正交完备性关系[9]：

$$g^{\mu\nu}\varepsilon_\mu^\lambda\varepsilon_\nu^{\eta*}=g^{\lambda\eta},\quad\sum_{\lambda=1,2,3}\varepsilon_\mu^\lambda\varepsilon_\nu^{\lambda*}=-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \tag{4.3}$$

在继续构造场算符之前，我们先观察之前所选取的基。如果用 ε_μ 来标记粒子的本征态，计算之后不难得到 $\varepsilon^-,\varepsilon^+,\varepsilon^O$ 分别对应螺度为 +1,-1 和 0。对于相同动量的粒子，其螺度不同本质上就是其自旋的方向不同，而这就和 Dirac 场产生了一些美妙的共鸣——Dirac 场量子化的过程中，我们发现不同自旋的粒子之间产生湮灭并不相关，从物理上来说，这当然也适用于矢量场。当然，我们还要考虑到整数自旋粒子应当服从对易量子化（而非反对易量子化），于是“猜测”出如下对易量子化条件：

$$\begin{aligned}&[a^\lambda(\vec{p}),a^{\eta\dagger}(\vec{q})]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\delta^{\lambda\eta}\\&[a^\lambda(\vec{p}),a^\eta(\vec{q})]=[a^{\lambda\dagger}(\vec{p}),a^{\eta\dagger}(\vec{q})]=0\end{aligned} \tag{4.4}$$

真空态和单粒子态的定义是：

$$\begin{aligned}&a^\lambda(\vec{p})\left|0\right\rangle=0\\&a^{\lambda\dagger}(\vec{p})\left|0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left|\vec{p},\lambda\right\rangle\end{aligned} \tag{4.5}$$

有了以上基本事实，就可以开始计算场算符之间的对易关系：

$$\begin{aligned}[A_\mu(x),A_\nu(y)]=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\omega_p\omega_q}}\times\\&\sum_{\lambda,\eta=1,2,3}\{\varepsilon_\mu^\lambda(p)\varepsilon_\nu^{\eta*}(q)[a^\lambda(\vec{p}),a^{\eta\dagger}(\vec{q})]\mathrm{e}^{-ipx}\mathrm{e}^{iqy}+\varepsilon_\mu^{\lambda*}(p)\varepsilon_\nu^\eta(q)[a^{\lambda\dagger}(\vec{p}),a^\eta(\vec{q})]\mathrm{e}^{ipx}\mathrm{e}^{-iqy}\}\\=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}\sum_{\lambda=1,2,3}\{\varepsilon_\mu^\lambda(p)\varepsilon_\nu^{\lambda*}(p)\mathrm{e}^{-ip(x-y)}-\varepsilon_\mu^{\lambda*}(p)\varepsilon_\nu^\lambda(p)\mathrm{e}^{ip(x-y)}\}\\=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2})[\mathrm{e}^{-ip(x-y)}-\mathrm{e}^{ip(x-y)}]\\=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}(-g_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2})[\mathrm{e}^{-ip(x-y)}-\mathrm{e}^{ip(x-y)}]\end{aligned} \tag{4.6}$$

如果将坐标空间的两点关联函数记为：

$$[\phi(x),\phi(y)]=i\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}[\mathrm{e}^{-ip(x-y)}-\mathrm{e}^{ip(x-y)}]$$

[9]正交性关系由规范直接给出，完备性关系在动量仅有 p_z 分量时可以被显然验证，而只要考虑到 Lorentz Boost 下，$g_{\mu\nu}$ 不变而 $p_\mu p_\nu$ 完全逆变，就知道在任意的坐标系下完备性关系都成立

那么，上面的式子可以化简为：

$$
\begin{aligned}
[A_\mu(x), A_\nu(y)] &= -[g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}]i\Delta(x-y) \\
\Rightarrow [A_\mu(t,\vec{x}), A_\nu(t,\vec{y})] &= 0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

类似地，可以计算出：

$$
\begin{aligned}
[F_{\mu\nu}(x), A_\rho(y)] &= [\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), A_\rho(y)] \\
&= \partial_\mu[A_\nu(x), A_\rho(y)] - \partial_\nu[A_\mu(x), A_\rho(y)] \\
&= \partial_\mu(-g_{\nu\rho} - \frac{\partial_\nu\partial_\rho}{m^2})i\Delta(x-y) + \partial_\nu(g_{\mu\rho} + \frac{\partial_\mu\partial_\rho}{m^2})i\Delta(x-y) \\
&= (-g_{\nu\rho}\partial_\mu + g_{\mu\rho}\partial_\nu)i\Delta(x-y) \\
\Rightarrow [\Pi^\mu(t,\vec{x}), A_\nu(t,\vec{y})] = [F^{\mu 0}(t,\vec{x}), A_\nu(t,\vec{y})] &= (-g^0{}_\nu\partial^\mu + g^\mu{}_\nu\partial^0)i\Delta(t,\vec{x}-\vec{y}) \\
&= -i\delta^\mu_\nu\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

以及：

$$
\begin{aligned}
[F_{\mu,0}(x), F_{\nu,0}(y)] &= [\partial^x_\mu A_0(x) - \partial^x_0 A_\mu(x), \partial^y_\nu A_0(y) - \partial^y_0 A_\nu(y)] \\
&= \partial^x_\mu\partial^y_\nu[A_0(x), A_0(y)] - \partial^x_\mu\partial^y_0[A_0(x), A_\nu(y)] - \partial^x_0\partial^y_\nu[A_\mu(x), A_0(y)] + \partial^x_0\partial^y_0[A_\mu(x), A_\mu(y)] \\
&= 0 \\
\Rightarrow [\Pi^\mu(t,\vec{x}), \Pi^\nu(t,\vec{y})] &= 0
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

最终，我们给出了矢量场正则量子化的正则对易关系：

$$
\begin{aligned}
&[\Pi^\mu(t,\vec{x}), A_\nu(t,\vec{y})] = -i\delta^\mu_\nu\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\
&[A_\mu(t,\vec{x}), A_\nu(t,\vec{y})] = [\Pi^\mu(t,\vec{x}), \Pi^\nu(t,\vec{y})] = 0
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

和对角化后的哈密顿量[10]：

$$
H = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3p\,\omega_p \sum_{\lambda=1,2,3} a^{\lambda\dagger}(\vec{p})a^\lambda(\vec{p}) \tag{4.11}
$$

4.2 无质量矢量场的对易量子化 [1]

有质量矢量场的量子化方法已经为我们做了铺垫，于是我们完全可以猜想，无质量矢量场的场算符为：

$$
A_\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_{\lambda=1}^{2}[\varepsilon^\lambda_\mu(p)a^\lambda(\vec{p})\mathrm{e}^{-ipx} + \varepsilon^{\lambda*}_\mu(p)a^{\lambda\dagger}(\vec{p})\mathrm{e}^{ipx}] \tag{4.12}
$$

以及对应的动量算符：

$$
\Pi^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} \tag{4.13}
$$

有差别的在于正交完备性关系：由于无质量场的 ε 只有 2 个，计算得到的正交完备性关系有差别：

$$
g^{\mu\nu}\varepsilon^\lambda_\mu\varepsilon^{\eta*}_\nu = g^{\lambda\eta},\ \sum_{\lambda=1,2}\varepsilon^\lambda_\mu\varepsilon^{\lambda*}_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{\|\vec{p}\|^2} \tag{4.14}
$$

[10] 推导是机械化的，过程略去。给出的哈密顿算符是经过重整的，消除了无穷大部分

在这样的正交完备性关系下，一定有：

$$A_0(x)=0,\, \Pi^0(x)=0$$

因此我们接下来无需讨论四维指标，只需要让 $\mu,\nu\to i,j$ 在 $1,2,3$ 之间选择即可。

产生湮灭算符的对易量子化条件为：

$$\begin{aligned}
&[a^\lambda(\vec{p}),a^{\eta\dagger}(\vec{q})]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\delta^{\lambda\eta}\\
&[a^\lambda(\vec{p}),a^{\eta}(\vec{q})]=[a^{\lambda\dagger}(\vec{p}),a^{\eta\dagger}(\vec{q})]=0
\end{aligned}\tag{4.15}$$

真空态和单粒子态的定义是：

$$\begin{aligned}
&a^\lambda(\vec{p})\,|0\rangle=0\\
&a^{\lambda\dagger}(\vec{p})\,|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\,|\vec{p},\lambda\rangle
\end{aligned}\tag{4.16}$$

经过类似的演算，可以给出场算符和动量算符的正则对易关系[11]：

$$\begin{aligned}
&[\Pi^i(t,\vec{x}),A_j(t,\vec{y})]=-i(\delta^i_j-\frac{\partial^i\partial_j}{\nabla^2})\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\\
&[A_i(t,\vec{x}),A_j(t,\vec{y})]=[\Pi^i(t,\vec{x}),\Pi^j(t,\vec{y})]=0
\end{aligned}\tag{4.17}$$

4.3 Feynman 传播子

量子场论理论告诉我们，计算散射振幅时的一个关键步骤是计算出 Feynman 传播子 Δ。仿照标量场的量子化，它被定义为：

$$\langle 0|\,T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}\,|0\rangle=i\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{ip(x-y)}\Delta^{\mu\nu}(p)\tag{4.18}$$

有了对易关系，我们可以像往常在所有其他场中所做的一样，计算出动量空间的传播子，进而构造出散射过程的费曼图和振幅表达式。对于有质量场，现在引入流 $J_\nu(x)$（这个流不受场的影响，只会与场产生相互作用），来考虑 Proca 拉氏量：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu-A^\mu J_\mu\tag{4.19}$$

做变分，给出运动方程：

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)+m^2A_\nu(x)=J_\nu(x)\tag{4.20}$$

利用 Fourier 变换到动量表象下，将有：

$$[(-p^2+m^2)g_{\mu\nu}+p_\mu p_\nu]A^\mu=J_\nu\tag{4.21}$$

无质量场也可以用类似的操作来处理，得到：

$$(-p^2g_{\mu\nu}+p_\mu p_\nu)A^\mu=J_\nu\tag{4.22}$$

[11] $\frac{1}{\nabla^2}$ 是 Laplace 算符在 Fourier 变换意义下的逆

传播子满足 $A^\mu = \Delta^{\mu\nu}J_\nu$，所以我们可以考虑，对以上两个式子 $(-p^2+m^2)g_{\mu\nu}+p_\mu p_\nu$ 和 $-p^2g_{\mu\nu}+p_\mu p_\nu$ 求逆来获得。

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \begin{pmatrix} p_0p_0-p^2+m^2 & p_0p_1 & p_0p_2 & p_0p_3 \\ p_1p_0 & p_1p_1+p^2-m^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_0 & p_2p_1 & p_2p_2+p^2-m^2 & p_2p_3 \\ p_3p_0 & p_3p_1 & p_3p_2 & p_3p_3+p^2-m^2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\det M_1 = m^2(p^2-m^2)^3
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

以上结果表明，只要质量 $m\neq 0$，矩阵 M_1 仅在 on-shell 的情形才有奇异性，我们当然可以采用 Klein-Gordon 场的技巧，加入一个 $i\varepsilon$ 的修正，即可给出非奇异的结果。直接求逆，得到：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Inverse}M_1 &= \frac{1}{m^2}\frac{1}{p^2-m^2+i\varepsilon}\begin{pmatrix} p_0p_0-m^2 & -p_0p_1 & -p_0p_2 & -p_0p_3 \\ -p_1p_0 & p_1p_1+m^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ -p_2p_0 & p_2p_1 & p_2p_2+m^2 & p_2p_3 \\ -p_3p_0 & p_3p_1 & p_3p_2 & p_3p_3+m^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^2-m^2+i\varepsilon}(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}) \\
&\triangleq \Delta_F^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

在(4.24)中，我们给出了 Feynman 传播子 $\Delta_F^{\mu\nu}$ 的表达式，这是仿照 Klein-Gordon 场的又一胜利[12]；带着乘胜追击的想法，我们继续计算出无质量场的情形：

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \begin{pmatrix} p_0p_0-p^2 & p_0p_1 & p_0p_2 & p_0p_3 \\ p_1p_0 & p_1p_1+p^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_0 & p_2p_1 & p_2p_2+p^2 & p_2p_3 \\ p_3p_0 & p_3p_1 & p_3p_2 & p_3p_3+p^2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\det M_2 = 0
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

令人沮丧的是，M_2 的困难是本质性的，其任一点都存在的奇异性导致我们我们不得不考虑换用其他方法。这里我们引入了规范场的 Faddeev-Popov 方法[13]，我们向拉氏量中加入一个“胁迫项”：

$$
\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - A^\mu J_\mu \tag{4.26}
$$

这种情形下，再变分得到的运动方程为：

$$
[-p^2g_{\mu\nu}+(1-\frac{1}{\xi})p_\mu p_\nu]A^\nu = J_\mu \tag{4.27}
$$

对这个新的矩阵求逆，即可得到 Feynman 传播子为：

$$
\Delta_F^{\mu\nu} = -\frac{g^{\mu\nu}-(1-\xi)\dfrac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2+i\varepsilon} \tag{4.28}
$$

[12]不得不注意的是，这个“胜利”存在问题：我们不加证明地认为，矢量场传播子和它编时算符的形式完全和标量场一致；然而在 0 分量上，由于 Feynman 传播子中的导数项有对时间的导数，原先的编时算符中的 $\theta(x^0-y^0)$ 等项都会被导数所影响，产生一个非 Lorentz 协变的贡献 $\widetilde{D_F^{\mu\nu}} = -\frac{i}{m^2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu$；但可喜的是，在这种矢量场与大多数场耦合的情况下，因为 A_0 分量并非独立，在耦合计算时会带来另一个非协变项恰好抵消掉传播子上的影响，所以按照这种方法“指定”传播子的表达式，只要确保未来计算耦合时不再额外区分 A_0 和 A_i 就能给出同样正确的结果。Sidney Coleman 的讲义中对此有比较详细的论述

[13]Faddeev-Popov 方法通过在作用量中加入一个没有物理意义，但破坏掉规范对称性的胁迫项，来实现规范固定。当然，严格的证明需要使用路径积分量子化方法，这里不做赘述

尽管形式上来说，这个传播子与 ξ 的取值有关，但作为一个具有 Lorentz 不变性和规范不变性的算符，传播子**不应该**与 ξ 有关。为了表明这一点，我们只要考虑到，当传播子与外部流 J_μ 耦合时，其动量项中给出的 $p^\mu J_\mu$ 项，经过 Fourier 变换即得到 $\partial^\mu j_\mu = 0$（这是守恒流条件），所以这个含有 $p^\mu p^\nu$ 的项实际上不会出现任何发散问题。那么为了简便起见，我们不妨取 $\xi = 1$，于是传播子可以写为：

$$\Delta_F^{\mu\nu} = -\frac{g^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \tag{4.29}$$

(4.29)被称为 Feynman 规范（Feynman Gauge）下的 Feynman 传播子。值得玩味的是，Feynman 规范和之前提到的 Lorenz 规范、Columb 规范等不太相同——它是一种软性规范，并不给出任何约束，也不约束自由度。

5 总结 [2, 3]

在以上内容里，我们按照正则量子化的流程，从拉氏量出发给出运动方程，然后对运动方程做量子化。其间，我们类比了 Klein-Gordon 场和 Dirac 场的解结构，给出了平面波解意义下的算符展开，并借助群论的自由度分析引入规范，从而解决了自由度冗余的问题。最后，我们计算了基本的正则对易关系和 Feynman 传播子。有了以上基础，我们就可以更轻松地复现出 Scalar QED 和 Spinor QED 中，含有光子传播子的项，这在本文中就不再赘述了。

参考文献

[1] G. G. Chen et al. *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Foreword by David Kaiser*. Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Foreword by David Kaiser, 2018.

[2] M. E. Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory*. An Introduction to Quantum Field Theory, 2006.

[3] MD Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model, 2013.